19/10/15

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2} \in [0,+\infty)$$

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$ $\alpha \quad q \quad b$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\} =$$

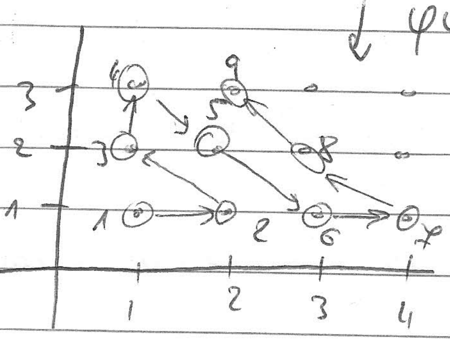
$$= \cup \{(p,q) : \dots\} =$$

$$= \{(0,1)\} \cup \{(r,q), -r \in \mathbb{N}\} \cup$$

$$\cup \underbrace{\{(r,q) \cdot r \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\}}_{\mathbb{N}^2}$$

$\boxed{\mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}}$

Μέτρηση φυσικών αριθμών.



Αν ισχύει ότι $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{R}$: διαχωρίσιμος χώρος

$\alpha \quad r_3 \ r_2 \ r_1 \quad \alpha+\varepsilon \Rightarrow \mathbb{R} \ni \alpha = \lim r_\nu$, $|r_\nu - \alpha| \to 0$: $d(\alpha, r_\nu) \to 0$

$$\overbrace{(x_1, \dots, x_n)}^{x} = \lim_{\nu} \overbrace{(x_1^\nu, \dots, x_n^\nu)}^{R^\nu}$$

$$d(x, R^\nu) \to 0$$

$\mathbb{R}^n$

(x_n, y_n) βασική : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0) : n, m \geq n_0 : d((x_n, y_n), (x_m, y_m)) < \varepsilon$

δηλ. $\sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} < \varepsilon$

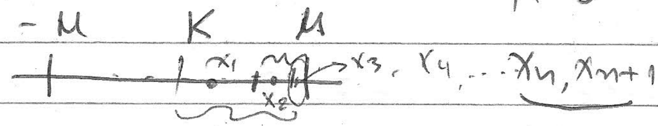
$|x_n - x_m|$

$|y_n - y_m|$ $\leq$

$K \subseteq \mathbb{R}^n$

K φραγμ. $\Rightarrow \exists M>0 : |x| \leq M, \forall x \in K$

$-M \leq x \leq M.$



$|x_n - x_{n+1}| \leq \dfrac{M}{2^n}$ ← υποδιπλασιασμός του διαστήματος μετά το n-οστό βήμα.

$x, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow \langle x,y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$

$\langle x,x \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2$

$\sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2} = d(x,0) = |x|$

Μία συνάρτηση N καλείται απόλυτη τιμή αν-ν:

1) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \ \forall x \in X$

2) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

3) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, δηλ. $x \in A: x = (x_1, \dots, x_n)$ κ' $f(x) = (y_1, \dots, y_m)$.

Επίσης $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, όπου $f_i = y_i, \ \forall i = 1, \dots, m$.

$A \subseteq \mathbb{R}$

A': παράγωγο σύνολο = σύνολο σημείων συσσώρευσης του A.

π.χ. $A = (0,1) \cup (5,+\infty) \Rightarrow A' = \left[(0,1) \cup (5,+\infty)\right]' = [0,1] \cup [5,+\infty)$.

A'': γενικευμένο παράγωγο σύνολο $\Rightarrow A'' = [0,1] \cup [5,+\infty]$

Αν $\left.\begin{array}{l} x \in A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \\ \delta > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B(x,\delta) = \begin{cases} \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < \delta\}, & x \in \mathbb{R} \\ \{y \in \mathbb{R} : y > \frac{1}{\delta}\}, & x = +\infty \\ \{y \in \mathbb{R} : y < -\frac{1}{\delta}\}, & x = -\infty \end{cases}$

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to z} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in A): x \in B_0(z,\delta) \Rightarrow f(x) \in B(\ell, \varepsilon)$.

Μπορεί $z \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$B_0(x,\delta) = B(x,\delta) \setminus \{x\}$

1) $\ell\in\mathbb{R} \mid (\forall \varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x_1,x_2\in B_0(z,\delta)) \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

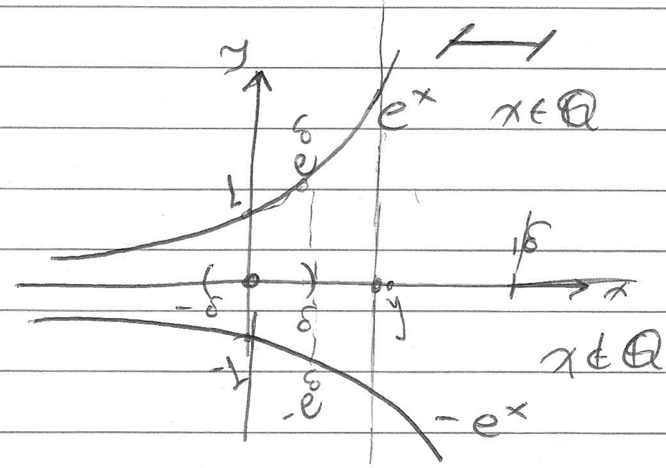
2) $\ell=+\infty \mid$ -//- $\Rightarrow |f(x_1), f(x_2)| > \frac{1}{\varepsilon}$

3) $\ell=-\infty \mid$ -//- $\Rightarrow f(x_1), f(x_2) < -\frac{1}{\varepsilon}$

$y\in A''$ (= σημαίνει ότι μπορώ να πλησιάσω το y ως όριο ακολουθιών στο α).

$\inf_\delta \sup\{f(x) : x\in B_0(y,\delta)\cap A\} = \limsup_{x\to y} f(x) = \limsup_y f = \overline{\lim_y} f$

$\sup_\delta \inf\{f(x) : x\in B_0(y,\delta)\cap A\} = \liminf_{x\to y} f(x) = \liminf_y f = \underline{\lim}_y f$



$\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ διότι για $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}^{\in\mathbb{Q}} \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(q_n)\to 1$
ενώ για $(r_n)\notin\mathbb{Q}$ (π.χ. $r_n=\frac{\sqrt{2}}{n}$) με $r_n\to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(r_n)\to -1$

$\inf_{\delta>0} e^\delta = e^{\inf_{\delta>0}\delta} = e^0 = 1$ ενώ $\sup_{\delta>0}(-e^\delta) = -\inf_{\delta>0} e^\delta = -1$

$\sup\{f(x) : x>\frac{1}{\delta}\} = +\infty \Rightarrow \inf_{\delta>0}\sup\{f(x) : x>\frac{1}{\delta}\} = +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\overline{\lim_y} f = +\infty}$

$\sup\inf\{f(x) : x<-\frac{1}{\delta}\} = -\infty \Rightarrow \boxed{\underline{\lim}_y f = -\infty}$

θ.δ.ο. $\underline{\lim_{y}} f \leq \overline{\lim_{y}} f$

Έστω $\delta_1, \delta_2 > 0$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

<u>άρα</u>

$\inf\{f(x) : x \in B_0(y, \delta_1) \cap A\} \leq \inf\{f(x) : x \in B_0(y,\delta) \cap A\} \leq$
$\leq \sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \leq \sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta_2) \cap A\}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\lim_{y}} f \leq \overline{\limsup_{y}} f}$$